



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه سؤال

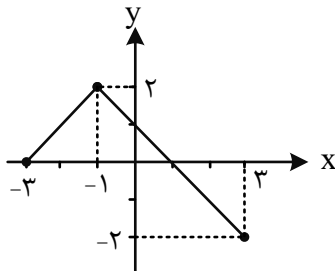
دوره زودبست دی ماه

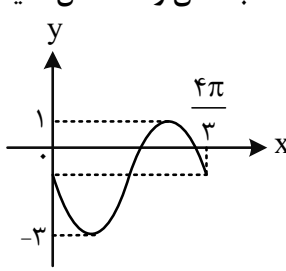
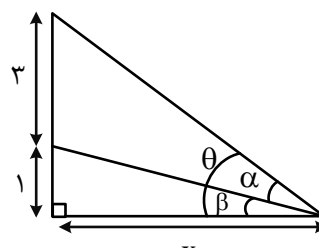
بسته جامع آمادگی نیم سال اول

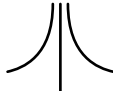



بودجه آزمون: فصل ۱ تا ۳

ردیف	درس	تعداد صفحه	زمان پاسخگویی
۱	حسابان ۲	۳	۱۲۰ دقیقه

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

سؤالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲	پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز	
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)		
۱	۰/۷۵	<p>درستی یا نادرستی عبارتهای زیر را مشخص کنید.</p> <p>الف) دامنه تابع با ضابطه $y = -kf\left(\frac{x}{p}\right)$ همان دامنه تابع $y = -kf(x)$ می باشد.</p> <p>ب) اگر $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ باشد، آنگاه $\sin \alpha < \tan \alpha$.</p> <p>پ) تابع $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 6}$ دو مجانب قائم دارد.</p>	
۲	۰/۷۵	<p>جاهای خالی را با عدد یا عبارت مناسب پر کنید.</p> <p>الف) تابع $g(x) = x^2 - 4x + 5$ در بازه $(-\infty, a]$ اکیداً نزولی است. حداکثر مقدار a برابر است.</p> <p>ب) دامنه تابع $y = \tan(2x)$ برابر است.</p> <p>پ) حاصل $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x}$ برابر است.</p>	
۳	۰/۷۵	<p>نمودار تابع f به صورت زیر است. نمودار تابع $y = -f(3x) + 1$ را رسم کنید.</p> 	
۴	۰/۵	<p>نمودار تابع $f(x) = \sqrt{x}$ را ابتدا سه واحد به سمت راست انتقال می دهیم و سپس عرض نقاط را دو برابر می کنیم. ضابطه تابع جدید را بنویسید.</p>	
۵	۱/۲۵	<p>به کمک نمودار تابع $y = \cos x$ با دامنه $[0, 2\pi]$، نمودار تابع $y = -\frac{1}{4} \cos\left(-\frac{1}{4}x\right)$ را رسم کنید و سپس برد آن را پیدا کنید.</p>	
۶	۱/۲۵	<p>ابتدا نمودار را رسم کرده و سپس تعیین کنید تابع در چه بازه های اکیداً صعودی و در چه بازه های اکیداً نزولی است.</p> $y = \begin{cases} (x-2)^3 & x \geq 1 \\ -2 & 0 \leq x < 1 \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$	
۷	۰/۷۵	<p>اگر تابع $f = \{(4, 4m-2), (0, m^2-4), (1, 3m)\}$ اکیداً صعودی باشد، حدود m را به دست آورید.</p>	
۸	۰/۵	<p>اگر $\frac{1}{125} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1}$ باشد، حدود x را بیابید.</p>	
صفحه ۱ از ۳			

سؤالات آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	ساعت شروع:	نام و نام خانوادگی:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز		
ردیف	سؤالات (پاسخ برگ دارد)			
۹	مقادیر a و b را طوری تعیین کنید که چندجمله‌ای $p(x) = 2x^3 + ax^2 - bx + 2$ بر $x + 2$ بخش پذیر و باقی مانده تقسیم آن بر $x - 1$ برابر با ۲ باشد.			
۱۰	چندجمله‌ای $x^5 - 1$ را طوری تجزیه کنید که $x - 1$ یک عامل آن باشد.			
۱۱	دوره تناوب و مقادیر ماکزیمم و مینیمم تابع $y = 2\sin(3x) - 1$ را به دست آورید.			
۱۲	شکل زیر قسمتی از نمودار تابع با ضابطه $y = a \sin(bx) + c$ است. با توجه به نمودار، ضابطه آن را مشخص کنید.			
۱/۲۵				
۱۳	معادله مثلثاتی $\cos 2x - \cos x + 1 = 0$ را حل کنید و جواب‌های کلی آن را بنویسید.			
۱۴	معادله مثلثاتی $\tan 3x = \tan x$ را حل کنید، سپس جواب‌هایی از آن را که در بازه $\left[0, \frac{\pi}{4}\right]$ قرار دارند، مشخص کنید.			
۱۵	مقدار $\tan(22/5^\circ)$ را به دست آورید.			
۱۶	<p>نشان دهید در شکل زیر رابطه بین زاویه α و x به صورت زیر است.</p>  $\tan \alpha = \frac{3x}{x^2 + 4}$			
۱۷	<p>حاصل حدهای زیر را در صورت وجود به دست آورید. ([] نماد جزء صحیح است.)</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{ 3x+1 }$</p> <p>ب) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2}$</p> <p>پ) $\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2 x + 2}{x^3 - 4x^2 + 1}$</p> <p>ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 - \frac{1}{\sqrt[3]{x}}}$</p>			
صفحه ۲ از ۳				

سؤالات آزمون شبهه‌ساز نهایی درس: حسابان ۲		پایه: دوازدهم	رشته: ریاضی و فیزیک	تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴
تعداد صفحه: ۳		مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	نام و نام خانوادگی:	
آزمون شبهه‌ساز امتحان نهایی		گروه آموزشی ماز		
ردیف	سوالات (پاسخ‌برگ دارد)			نمره
۱۸	<p>نمودار تابع f به شکل مقابل است. حدود خواسته شده را بنویسید.</p> <p>الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x)$ ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x)$</p> <p>پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x)$ ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x)$</p>			
۱۹	<p>مجانب‌های افقی و قائم تابع زیر را در صورت وجود به دست آورید.</p> <p>$y = \frac{2x - x^2}{x^2 - 4}$</p>	۱/۲۵		
۲۰	<p>کدام شکل وضعیت نمودار تابع $f(x) = \frac{[-x]}{1-x}$ در نزدیکی مجانب قائم آن است؟ (دلیل خود را بنویسید).</p> <p>(الف) </p> <p>(ب) </p> <p>(پ) </p> <p>(ت) </p>	۱		
۲۱	<p>نمودار تابع f را به گونه‌ای رسم کنید که همه شرایط زیر را دارا باشد:</p> <p>(۱) $f(1) = f(-2) = 0$</p> <p>(۲) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$</p> <p>(۳) خط $y = -1$ مجانب افقی آن باشد.</p>	۰/۵		
۲۰	موفق باشید.			
صفحه ۳ از ۳				



پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



پاسخبرگ حسابان ۲

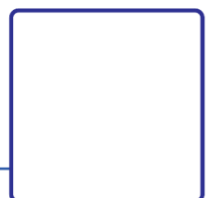
دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

برای شباهت حداکثری به امتحانات نهایی، صفحه‌آرایی، فونت و حتی اندازه متن در تمامی آزمون‌های تشریحی ماز، کاملاً یکسان با استاندارد امتحانات نهایی در نظر گرفته می‌شود.

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبه‌ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی‌ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبه‌ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ‌برگ	نمره
۱	الف) (ب) (پ)	۰/۷۵
۲	الف) (ب) (پ)	۰/۷۵
۳		۰/۷۵
۴		۰/۵
۵		۱/۲۵



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

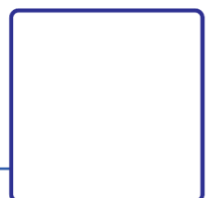
ردیف	پاسخ برگ	نمره
۶		۱/۲۵
۷		۰/۷۵
۸		۰/۵
۹		۱
۱۰		۰/۵

ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۱		۰/۷۵
۱۲		۱/۲۵
۱۳		۱/۲۵
۱۴		۱
۱۵		۱

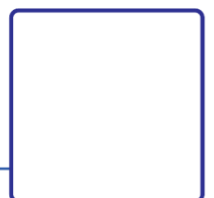
ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

نمره	پاسخ برگ	ردیف
۱		۱۶
۰/۵		الف)
۰/۵		ب)
۰/۵		پ)
۰/۵		ت)
۱		الف)
		ب)
		پ)
		ت)



ساعت شروع:	رشته: ریاضی و فیزیک	تعداد صفحه: ۵	آزمون شبهه ساز نهایی درس: حسابان ۲
تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	مدت آزمون: ۱۲۰ دقیقه	پایه دوازدهم	نام و نام خانوادگی:
گروه آموزشی ماز		آزمون شبهه ساز امتحان نهایی	

ردیف	پاسخ برگ	نمره
۱۹		۱/۲۵
۲۰		۱
۲۱		۰/۵
	موفق باشید.	۲۰





پایه دوازدهم ریاضی

آزمون‌های شبیه‌ساز امتحانات نهایی ماز



تسلط بر نیم سال اول



دفترچه پاسخ

دوره زودبست دی ماه

بسته جامع آمادگی نیم سال اول

بودجه آزمون: فصل ۱ تا ۳

ویراستاران

ارسلان حسنونند - نرجس تیمناک
حمیدرضا ولی‌پور

طراحان

سیدجواد نظری - محدثه شیخعلی

درس

حسابان ۲

حق چاپ و تکثیر سؤالات به هر روش (الکترونیکی و...) پس از برگزاری آزمون برای تمامی اشخاص حقیقی و حقوقی تنها با مجوز «گروه ماز» مجاز می‌باشد و با متخلفین برابر مقررات رفتار می‌شود.

مصحح شو:



پاسخ دقیق سؤال این جا میاد و اسمش روشه: «مصحح شو»، می خواد شما رو به یه مصحح حرفه‌ای و دقیق تبدیل کنه که بدونین موقع ارزیابی جواب‌هاتون باید حواستون به چی باشه تا توی آزمون‌های بعدی دقیق‌تر عمل کنین. اگه جواب یه سؤال رو بشه به شکل‌های مختلف بیان کرد، اون هم، این جا بهتون گفتیم.

بررسی دقیق‌تر:



اگه پاسخ کوتاه به سؤال کافی نباشه تا ببینین چطوری باید به جواب برسین، توی این بخش با بررسی دقیق‌تر جواب، سؤال رو براتون توضیح دادیم.

نقشه نهایی:



امتحان نهایی قوانین و قواعد خاص خودش رو داره؛ شما باید بدونین تیپ‌های رایج سؤال‌های امتحان نهایی چیه و باید چطوری بهش جواب بدین. این کادر، مشاوره حرفه‌ای ماست به شما تا فوت و فن‌های امتحان نهایی رو یاد بگیرین.

۲۰ شو:



توی «۲۰ شو»، مبحث هر سؤال رو براتون مرور یا جمع‌بندی کردیم؛ «۲۰ شو» و درسنامه‌هاش دقیقاً فاصله بین نمره خوب و نمره ۲۰ رو براتون پر می‌کنه.

نکته طلایی:



با وجود «۲۰ شو»، که کلی درسنامه مفصل داره، باز هم اگه نکته مهم و مفیدی بود، توی این کادر براتون آوردیم.

تیم اجرایی و تولید آزمون

مرضیه بنیانی

یگانه پوراابراهیم

زهرة جعفری

فائزه زارع

محدثه شیخ علی

محدثه عربگری

ساره محمدعلی نسب

زینب مرتضوی

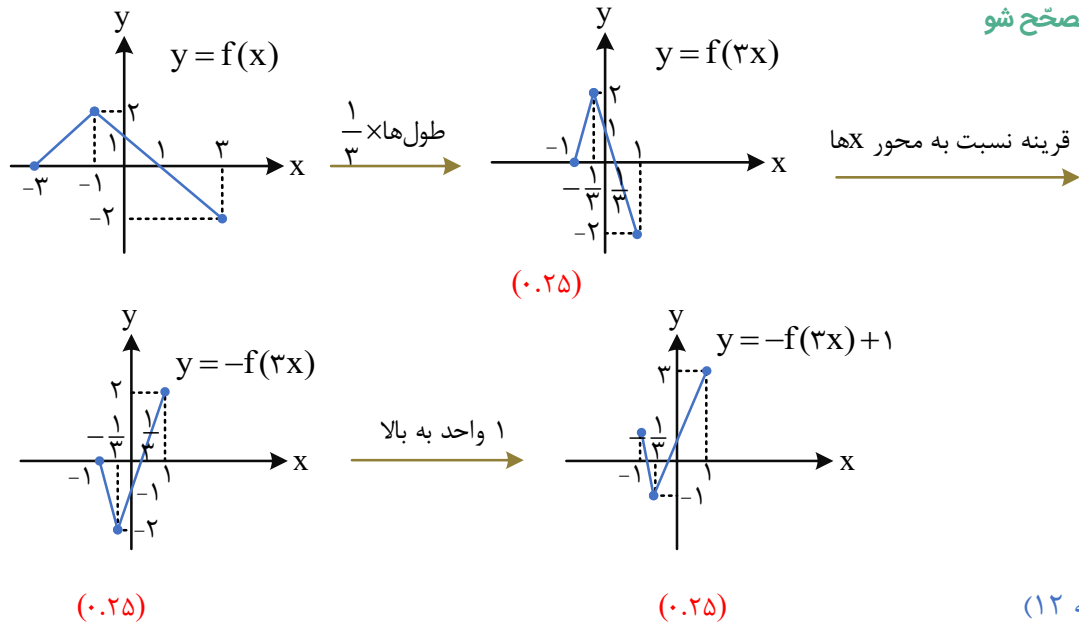
سرپرست آزمون: ارمغان قریب

یک تیم با بیش از ۵۰۰ نفر در حال کار هستن تا آزمون‌های ما با حداکثر کیفیت حاضر بشن و به شما کمک کنن و مسیر موفقیت رو براتون ساده‌تر کنن. همیشه از نظرات و کامنت‌های خوب‌تون انرژی می‌گیریم. مرسی که همراهمون هستین.

دکتر رسول خنجری

راهنمای تصحیح آزمون نهایی درس: حسابان ۲		رشته: ریاضی و فیزیک
دوره دوم متوسطه - دوازدهم	تاریخ آزمون: دی ماه ۱۴۰۴	ساعت شروع:
آزمون شبهه ساز امتحان نهایی		مدت زمان: ۱۲۰ دقیقه
گروه آموزشی ماز		
ردیف	راهنمای تصحیح	نمره
۱	<p>مصّحّح شو</p> <p>الف) نادرست (۰.۲۵) (صفحه ۱۱) ب) درست (۰.۲۵) (صفحه ۳۴) پ) درست (۰.۲۵) (صفحه ۵۸)</p> <p>بررسی دقیق‌تر:</p> <p>الف) اگر دامنه $y = -kf(x)$، $[a, b]$ باشد، دامنه $y = -kf\left(\frac{x}{p}\right)$ می‌شه $[pa, pb]$.</p> <p>ب) $\tan \alpha - \sin \alpha > 0 \Rightarrow \frac{\sin \alpha (1 - \cos \alpha)}{\cos \alpha} > 0 \Rightarrow \tan \alpha > 0$</p> <p>که این نامساوی برای $0 < \alpha < \frac{\pi}{2}$ برقرار است.</p> <p>پ) $f(x) = \frac{x^2 + 3x + 2}{x^2 + x - 6} = \frac{(x+1)(x+2)}{(x+3)(x-2)} \Rightarrow x = 2, -3$ مجانب قائم</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه</p>	۰/۷۵
۲	<p>مصّحّح شو</p> <p>الف) ۲ (۰.۲۵) (صفحه ۲۱) ب) $\left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}, k \in \mathbb{Z} \right\}$ (۰.۲۵) (صفحه ۳۲)</p> <p>پ) صفر (۰.۲۵) (صفحه ۵۸)</p> <p>بررسی دقیق‌تر:</p> <p>الف) باید رأس سهمی را پیدا کنیم:</p> <p>$y = x^2 - 4x + 5 = (x-2)^2 + 1 \Rightarrow x_S = 2$</p> <p>ب) $D_{\tan x} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq k\pi + \frac{\pi}{2}; k \in \mathbb{Z} \right\} \Rightarrow D_{\tan(2x)} = \left\{ x \in \mathbb{R} \mid x \neq \frac{k\pi}{2} + \frac{\pi}{4}; k \in \mathbb{Z} \right\}$</p> <p>پ) $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{[x]}{x} = \frac{\text{مطلق } 0}{\text{حدی } 0} = 0$</p> <p>مسیر تمرینی:</p> <p>مشابه این سوال در سوال ۱ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: دقیقه</p>	۰/۷۵

مصطح شو



سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

تبدیل و انتقال نمودار

توضیحات و نحوه رسم	نمودار جدید ($a, k > 0$)
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت چپ منتقل می‌کنیم.	$f(x+a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور x ها به سمت راست منتقل می‌کنیم.	$f(x-a)$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت بالا منتقل می‌کنیم.	$f(x)+a$
نمودار تابع f را به اندازه a واحد در راستای محور y ها به سمت پایین منتقل می‌کنیم.	$f(x)-a$
نمودار تابع f را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	$f(-x)$
نمودار تابع f را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$-f(x)$

توضیحات و نحوه رسم	نمودار جدید ($a, k > 0$)
نمودار تابع f را ابتدا نسبت به محور y ها و سپس نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم. (قرینه نسبت به مبدأ)	$-f(-x)$
نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منقبض (فشرده) می‌کنیم.	$k > 1$
نمودار تابع f را در راستای محور x ها با ضریب $\frac{1}{k}$ منبسط (کشیده) می‌کنیم.	$0 < k < 1$
نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منبسط (کشیده) می‌کنیم.	$k > 1$
نمودار تابع f را در راستای محور y ها با ضریب k منقبض (فشرده) می‌کنیم.	$0 < k < 1$
ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$ f(x) $
ابتدا نمودار تابع f را رسم کرده و سپس هر آن‌چه سمت چپ محور y ها قرار دارد را حذف کرده و به جای آن نمودار سمت راست محور y ها را نسبت به محور y ها قرینه می‌کنیم.	$f(x)$
ابتدا نمودار $y = f(x)$ را رسم کرده و سپس هر آن‌چه زیر محور x ها قرار دارد را حذف کرده و نمودار بالای محور x ها را نسبت به محور x ها قرینه می‌کنیم.	$ y = f(x)$

۰/۷۵

۳

۰/۵	<p>مصطح شو </p> <p>عرض نقاط ۲ برابر $f(x) = \sqrt{x-3}$ $\xrightarrow{\text{واحد به راست ۳}}$ $f(x) = \sqrt{x}$ (صفحه ۱۱) $\xrightarrow{\text{عرض نقاط ۲ برابر}}$ $f(x) = 2\sqrt{x-3}$ (۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۱ دقیقه </p>	۴
-----	--	---

۱/۲۵	<p>مصطح شو </p> <p>ابتدا تابع $\cos x$ را روی $[0, 2\pi]$ رسم می‌کنیم: (صفحه ۱۱)</p> <p>طول نقاط ۲ برابر $y = \cos\left(\frac{1}{2}x\right)$ </p> <p>قرینه نسبت به محور عرض‌ها $y = \cos\left(-\frac{1}{2}x\right)$ </p> <p>عرض نقاط ۱/۲ برابر $y = \frac{1}{2}\cos\left(-\frac{x}{2}\right)$ </p> <p>قرینه نسبت به محور Xها $y = -\frac{1}{2}\cos\left(-\frac{x}{2}\right)$ </p> <p>بنابراین برد تابع همیشه: $R = \left[-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right]$ (۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۶ دقیقه </p>	۵
------	--	---

	<p>نقشه نهایی: </p> <p>حتماً حتماً همه مراحل انتقال رو رسم کنین که کلاه سرتون نره!</p>	
<p>۱/۲۵</p>	<p>مصّحّ شو </p> $y = \begin{cases} (x-2)^3 & 1 \leq x \\ -2 & 0 \leq x < 1 \quad (\text{صفحه } 21) \\ x+1 & x < 0 \end{cases}$ <p>بازه‌های اکیداً صعودی: $[-1, 0) \cup [1, +\infty)$ (۰.۲۵) (۰.۲۵)</p> <p>بازه اکیداً نزولی: $(-\infty, -1)$ (۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه </p>	<p>۶</p>
<p>۰/۷۵</p>	<p>مصّحّ شو </p> <p>ابتدا تابع را مرتب شده روی مولفه‌های اول می‌نویسیم: (صفحه ۲۱)</p> $f = \{(0, m^2 - 4), (1, 3m), (4, 4m - 2)\}$ <p>برای این که تابع اکیداً صعودی باشد، باید: $m^2 - 4 < 3m < 4m - 2$ (۰.۲۵)</p> $\Rightarrow m^2 - 4 < 3m \Rightarrow m^2 - 3m - 4 < 0 \Rightarrow (m-4)(m+1) < 0 \Rightarrow -1 < m < 4$ $3m < 4m - 2 \Rightarrow m - 2 > 0 \Rightarrow m > 2$ <p>چون هر دو نامساوی باید برقرار باشند، اشتراک می‌گیریم:</p> $(2, +\infty) \cap (-1, 4) = (2, 4)$ <p>پس: $2 < m < 4$ (۰.۲۵)</p> <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه </p>	<p>۷</p>
<p>۰/۵</p>	<p>مصّحّ شو </p> <p>روش اول:</p> $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \frac{1}{125} \Rightarrow \left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \quad (\text{صفحه } 22) \quad (0.25)$ <p>از آن جا که تابع $\left(\frac{1}{5}\right)^x$ نزولی است، هر چه توان کوچک‌تر باشد، مقادیرش بزرگ‌تر است، پس باید:</p> $2x+1 \geq 3 \Rightarrow x \geq 1 \quad (0.25)$ <p>روش دوم:</p> $\left(\frac{1}{5}\right)^{2x+1} \leq \left(\frac{1}{5}\right)^3 \Rightarrow 5^{-2x-1} \leq 5^{-3} \quad (0.25)$ <p>چون 5^x صعودی اکید است، هر چه توان بزرگ‌تر باشد، مقادیر تابع هم بزرگ‌تر خواهند بود.</p> $-2x-1 \leq -3 \Rightarrow x \geq 1 \quad (0.25)$ <p>سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه </p>	<p>۸</p>

مصّحح شو 

برای آن که $p(x)$ بر $x+2$ بخش پذیر باشد، باید به ازای ریشه $x+2$ صفر شود: (صفحه ۲۲)

$$x+2=0 \Rightarrow x=-2 \Rightarrow p(-2)=0 \Rightarrow p(-2)=-16+4a+2b+2=0$$

$$\Rightarrow 4a+2b=14 \Rightarrow 2a+b=7 \quad (I) \quad (0.25)$$

همچنین چون باقی مانده بر $x-1$ ، 2 شده، پس باید به ازای ریشه $x-1$ ، حاصل $p(x)$ برابر 2 شود:

$$x-1=0 \Rightarrow x=1 \Rightarrow p(1)=2 \Rightarrow 2+a-b+2=2 \Rightarrow a-b=-2 \quad (II) \quad (0.25)$$

حال با استفاده از روابط (I) و (II)، a و b را می یابیم:

$$\begin{cases} 2a+b=7 \\ a-b=-2 \end{cases} \xrightarrow{+} 3a=5 \Rightarrow a=\frac{5}{3}, b=\frac{11}{3}$$

(0.25) (0.25)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 

تقسیم چندجمله‌ای بر دوجمله‌ای درجه اول 

در تقسیم چندجمله‌ای $f(x)$ بر دوجمله‌ای درجه اول $(ax+b)$ ، باقی مانده تقسیم برابر $f(-\frac{b}{a})$ است.

نتیجه: اگر $f(-\frac{b}{a})=0$ باشد، به این معنی است که $f(x)$ بر $(ax+b)$ بخش پذیر است.

مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال در سوال ۶ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحح شو 

$$x^5-1=(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) \quad (صفحه ۲۲)$$

(0.25) (0.25)

بررسی دقیق تر: 

این دقیقاً از فرمول مجموع جملات دنباله هندسی تو حسابان ۱ میاد! یادتونه؟!

$$1+x+x^2+\dots+x^n = \frac{1(1-x^{n+1})}{1-x} = \frac{x^{n+1}-1}{x-1}$$

$$(x-1)(1+x+\dots+x^n) = x^{n+1}-1$$

$$(x-1)(x^4+x^3+x^2+x+1) = x^5-1$$

بنابراین با طرفین وسطین:

که اگر n رو بذارین ۴:

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه 

چندجمله‌ای‌ها 

به ازای هر $n \in \mathbb{N}$ داریم:

$$x^n - a^n = (x-a)(x^{n-1} + ax^{n-2} + a^2x^{n-3} + \dots + a^{n-2}x + a^{n-1})$$

به کمک اتحاد بالا می توان نتیجه گرفت که:

$$x^n + a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots - a^{n-2}x + a^{n-1})$$





• اگر n فرد باشد:

• اگر n زوج باشد:

$$x^n - a^n = (x+a)(x^{n-1} - ax^{n-2} + a^2x^{n-3} - \dots + a^{n-2}x - a^{n-1})$$

۰/۵

۱۰

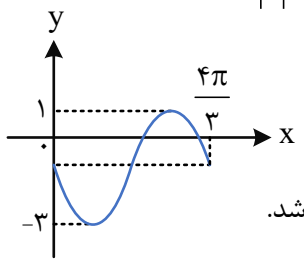
	<p>یه نمونه باحال </p> <p>هر یک از چندجمله‌ای‌های زیر را برحسب عامل خواسته شده تجزیه کنید.</p> <p>(الف) $x^6 - 1$ با عامل $(x+1)$:</p> $x^6 - 1 = (x+1)(x^5 - x^4 + x^3 - x^2 + x - 1)$ <p>(ب) $x^6 - 1$ با عامل $(x-1)$:</p> $x^6 - 1 = (x-1)(x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$	
<p>۰/۷۵</p>	<p>یه نمونه باحال </p> <p>چندجمله‌ای $x^5 + ۳۲$ را برحسب عامل $(x+۲)$ تجزیه کنید.</p> $x^5 + ۳۲ = x^5 + ۲^5 \Rightarrow \begin{cases} n = 5 \\ a = 2 \end{cases}$ $x^5 + ۳۲ = (x+۲)(x^4 - ۲x^3 + ۴x^2 - ۸x + ۱۶)$	<p>۱۱</p>
<p>۱/۲۵</p>	<p>مصتخ شو </p> <p>برای به دست آوردن دوره تناوب تابع $y = a \sin(bx) + c$ داریم: $T = \frac{2\pi}{ b }$ (صفحه ۳۴)</p> <p>پس: $y = ۲ \sin(۳x) - ۱ \Rightarrow T = \frac{2\pi}{ ۳ } = \frac{2\pi}{۳}$ (۰.۲۵)</p> <p>برای به دست آوردن \max و \min باید سینوس، ± 1 باشد که با توجه به علامت ضریب مشخص میشه کدوم \max و کدوم \min هست. اینجا چون ضریب مثبت هست، پس با جای گذاری ۱ داریم:</p> $\max = ۲ - ۱ = ۱$ (۰.۲۵) <p>و برای \min داریم: $\min = ۲(-۱) - ۱ = -۳$ (۰.۲۵)</p> <p>مسیر تمرینی: </p> <p>مشابه این سوال در سوال ۷ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.</p>	<p>۱۲</p>

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

در ابتدا، چون شیب خط مماس بر تابع در $x=0$ منفی است (نمودار با شیب منفی محور عرض‌ها رو قطع کرده) پس $ab < 0$. با توجه به نمودار دوره تناوب تابع $T = \frac{4\pi}{۳}$ و از طرفی $T = \frac{2\pi}{|b|}$ ، بنابراین: (صفحه ۳۳)

$$\frac{2\pi}{|b|} = \frac{4\pi}{۳} \Rightarrow |b| = \frac{۳}{۲}$$

(۰.۲۵)



فرض کنیم $b < 0$ و بنابراین با توجه به $ab < 0$ ، a باید مثبت باشد. همچنین با توجه به مقادیر \max و \min داریم:

$$\max = a + c, \min = c - a \Rightarrow \begin{cases} c - a = -۳ \\ c + a = ۱ \end{cases} \Rightarrow c = -۱, a = ۲$$

(۰.۲۵) (۰.۲۵)

بنابراین تابع به شکل $y = -2\sin\left(\frac{3}{4}x\right) - 1$ یا $y = 2\sin\left(-\frac{3}{4}x\right) - 1$ (۰.۲۵) بوده است.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۵ دقیقه 

توابع مثلثاتی: 

در توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx + d) + c$ و $y = a \cos(bx + d) + c$ داریم:

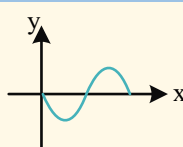
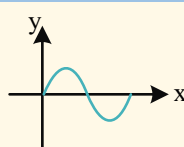
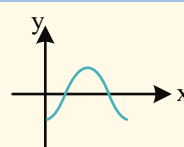
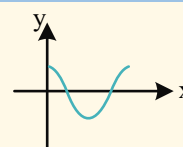
$$\begin{aligned} \text{مقدار بیش‌ترین مقدار} &: \cos \text{ یا } \sin \text{ ضرب } |a| + c \Rightarrow \max = |a| + c \\ \text{مقدار کمترین مقدار} &: -\cos \text{ یا } \sin \text{ ضرب } |a| + c \Rightarrow \min = -|a| + c \end{aligned} \Rightarrow \begin{cases} |a| = \frac{\max - \min}{2} \\ c = \frac{\max + \min}{2} \end{cases}$$

$$\text{دوره تناوب} = \frac{2\pi}{|\text{ضرب } x|} \Rightarrow T = \frac{2\pi}{|b|}$$

$$T = \frac{\pi}{|\text{ضرب } x|} \Rightarrow T = \frac{\pi}{|b|}$$

در تابع مثلثاتی $y = a \tan(bx) + c$ دوره تناوب برابر است با:

فرم کلی توابع مثلثاتی $y = a \sin(bx)$ و $y = a \cos(bx)$:

$y = a \sin(bx)$		$y = a \cos(bx)$	
$ab < 0$	$ab > 0$	$a < 0$	$a > 0$
			


مسیر تمرینی: 

مشابه این سوال در سوال ۸ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصّحّح شو 

$$\begin{aligned} \cos 2x - \cos x + 1 = 0 &\Rightarrow 2 \cos^2 x - 1 - \cos x + 1 = 0 \\ \Rightarrow 2 \cos^2 x - \cos x = 0 &\Rightarrow \cos x (2 \cos x - 1) = 0 \quad (\text{صفحه } ۴۴) \\ &\quad (۰.۲۵) \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} \cos x = 0 \Rightarrow x = \left(k\pi + \frac{\pi}{2}\right) \text{ یا } \left(k\pi - \frac{\pi}{2}\right) & (۰.۲۵) \\ \cos x = \frac{1}{2} \Rightarrow x = 2k\pi \pm \frac{\pi}{3} & (۰.۲۵) \end{cases}$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 

مصّحح شو 

روش اول: با توجه به رابطه $\tan 2\alpha = \frac{2 \tan \alpha}{1 - \tan^2 \alpha}$ و $\tan 45^\circ = 1$ ، داریم: (صفحه ۴۲)

$$1 = \tan 45^\circ = \frac{2 \tan(22/5^\circ)}{1 - \tan^2(22/5^\circ)} \Rightarrow 1 - \tan^2(22/5^\circ) = 2 \tan(22/5^\circ) \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow \tan^2(22/5^\circ) + 2 \tan(22/5^\circ) - 1 = 0 \Rightarrow \tan 22/5^\circ = \sqrt{2} - 1 \quad (0.25)$$

روش دوم: قرار بدید $t = \tan(22/5^\circ)$ و داریم:


$$\tan(45^\circ - 22/5^\circ) = \frac{\tan(45^\circ) - \tan(22/5^\circ)}{1 + \tan(45^\circ) \tan(22/5^\circ)} \quad (0.25)$$

$$\Rightarrow t = \frac{1-t}{1+t} \Rightarrow t + t^2 = 1 - t \Rightarrow t^2 + 2t - 1 = 0 \Rightarrow t = \sqrt{2} - 1 \quad (0.25)$$

روش سوم: با استفاده از روابط $\tan(\frac{\pi}{4}) = \frac{\sin(\frac{\pi}{4})}{\cos(\frac{\pi}{4})}$ و $\sin^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1 - \cos(\frac{\pi}{4})}{2}$ ، $\cos^2(\frac{\pi}{4}) = \frac{1 + \cos(\frac{\pi}{4})}{2}$ داریم:

$$\cos^2 \frac{\pi}{4} = \frac{1 + \frac{\sqrt{2}}{2}}{2} \Rightarrow \cos \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} + \sqrt{2}}{2} \quad (0.25)$$

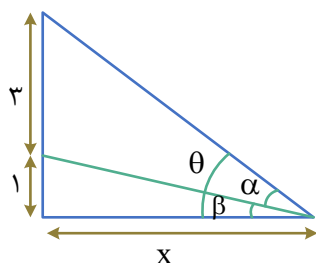
$$\sin \frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2} - \sqrt{2}}{2} \Rightarrow \tan(\frac{\pi}{4}) = \tan(22/5^\circ) = \sqrt{2} - 1 \quad (0.25)$$

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه 

۱۵

مصّحح شو 


$$\tan(\theta - \beta) = \tan \alpha = \frac{\tan \theta - \tan \beta}{1 + \tan \theta \tan \beta} \quad (صفحه ۴۳) \quad (0.25)$$



$$\tan \alpha = \frac{\frac{4}{x} - \frac{1}{x}}{1 + (\frac{4}{x})(\frac{1}{x})} = \frac{\frac{3}{x}}{1 + \frac{4}{x^2}} = \frac{3x}{x^2 + 4} \quad (0.25)$$

و در نتیجه:

و به رابطه داده شده رسیدیم.

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه 

۱۶

مصحح شو 

۰/۵
$$\lim_{x \rightarrow -\frac{1}{3}} \frac{[x]}{|3x+1|} = \frac{-1}{\cdot+} = -\infty \quad (۰.۲۵)$$

الف) (صفحه ۵۸)

۰/۵
$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x + \sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{x}{x^2} + \frac{\sin^2 x}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{\sin x}{x} \xrightarrow{\text{هم‌ارزی}} 1$$

ب) (صفحه ۵۸)

$$\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{x} + 1 = +\infty \quad (۰.۲۵)$$


۰/۵
$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{3x^2|x|+2}{x^3-4x^2+1} \xrightarrow{x < 0 \Rightarrow |x| = -x} \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3+2}{x^3-4x^2+1} \quad (۰.۲۵)$$

پ) (صفحه ۶۹)

پرتوان
$$= \lim_{x \rightarrow -\infty} \frac{-3x^3}{x^3} = -3 \quad (۰.۲۵)$$

۰/۵
$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{1 + \frac{1}{\sqrt{x}}}{2 - \frac{1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\frac{\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}}}{\frac{2\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}}} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sqrt{x}(\sqrt{x}+1)}{(2\sqrt{x}-1)\sqrt{x}} \xrightarrow{\text{پرتوان}} \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{x^{\frac{5}{2}}}{2x^{\frac{5}{2}}} = \frac{1}{2} \quad (۰.۲۵)$$

ت) (صفحه ۶۹)

 سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۷ دقیقه

محاسبه حد توابع شامل قدرمطلق و جزء صحیح 

وقتی در سوال حد، به جزء صحیح و یا قدرمطلق برخورد کنیم، باید ابتدا جزء صحیح را تعیین مقدار و قدرمطلق را تعیین علامت کنیم. چند مثال ببینید:

•
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]}{\sin x} = \frac{[3^-]}{\cdot-} = \frac{-1}{\cdot-} = +\infty$$
 ,
$$\lim_{x \rightarrow 3^-} \frac{[x]-3}{x-3} = \frac{[3^-]-3}{3^- - 3} = \frac{2-3}{\cdot-} = \frac{-1}{\cdot-} = +\infty$$

•
$$\lim_{x \rightarrow 3} \frac{2}{|x-3|} = \frac{2}{|3^\pm - 3|} = \frac{2}{|\cdot^\pm|} = \frac{2}{\cdot+} = +\infty$$
 ,
$$\lim_{x \rightarrow \left(-\frac{1}{3}\right)} \frac{[x]}{\left|3x+1\right|} = \frac{\left[-\frac{1}{3}\right]}{\left|3\left(-\frac{1}{3}\right)^\pm + 1\right|} = \frac{-1}{\cdot+} = -\infty$$

۱- حد نامتناهی

نکته: در محاسبه $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)}$ اگر حد تابع صورت کسر عددی مخالف صفر و حد تابع مخرج کسر برابر صفر باشد در این صورت حاصل حد، نامتناهی (+∞ یا -∞) خواهد بود.

توجه: برای تعیین علامت ∞ باید به علامت صورت و علامت مخرج کسر توجه کنیم.

$\frac{+ عدد}{\cdot+} = +\infty$	$\frac{- عدد}{\cdot-} = +\infty$	$\frac{+ عدد}{\cdot-} = -\infty$	$\frac{- عدد}{\cdot+} = -\infty$
----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------	----------------------------------

۲- محاسبه حد توابع کسری در بی نهایت

در محاسبه $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{ax^n + bx^{n-1} + \dots}{a'x^m + b'x^{m-1} + \dots}$; $(m, n \in \mathbb{N})$ حد عبارت صورت و مخرج کسر به سمت $+\infty$ یا $-\infty$ میل می کند که در این

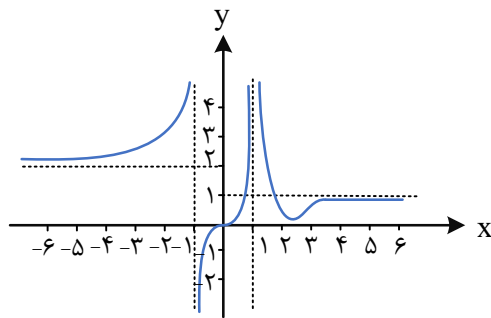
صورت با حالت مبهم $\frac{\infty}{\infty}$ مواجه خواهیم بود که برای رفع ابهام از آن در صورت و مخرج کسر، جمله با بیشترین توان را نگه داشته و مابقی جملات را حذف می کنیم، سپس با توجه به جدول زیر حاصل حد را محاسبه می کنیم:

نوع	حاصل حد
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج بیشتر باشد.	$+\infty$ یا $-\infty$
درجه عبارت صورت با درجه عبارت مخرج برابر باشد.	$\frac{a}{a'}$
درجه عبارت صورت از درجه عبارت مخرج کمتر باشد.	صفر

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۱۰ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو



(الف) $\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = 2$ (۰.۲۵) (صفحه ۶۹)

(ب) $\lim_{x \rightarrow (-1)^+} f(x) = -\infty$ (۰.۲۵)

(پ) $\lim_{x \rightarrow 1^-} f(x) = +\infty$ (۰.۲۵)

(ت) $\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = 1$ (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۲ دقیقه

مصحح شو

برای به دست آوردن مجانب های قائم، ابتدا تابع را تا جای ممکن ساده می کنیم: (صفحه ۶۹)

$$y = \frac{2x - x^2}{x^2 - 4} = \frac{x \cancel{(2-x)}}{(x-2)(x+2)} = \frac{-x}{x+2} \quad (۰.۲۵)$$

بنابراین $x + 2 = 0 \Rightarrow x = -2$ تنها مجانب قائم است و برای مجانب افقی داریم: (۰.۲۵)

پرتوان

$$\lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{2x - x^2}{x^2 - 4} = \lim_{x \rightarrow \pm\infty} \frac{-x^2}{x^2} = -1 \quad (۰.۲۵)$$

و بنابراین $y = -1$ تنها مجانب افقی تابع است. (۰.۲۵)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۴ دقیقه

حالا مجانب ها رو خوب یاد بگیرید...

خط $x = a$ را مجانب قائم تابع f می گوئیم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow a^\pm} f(x) = \pm\infty$

در توابع کسری ریشه های مخرج کسر که ریشه صورت کسر نباشند.

کاندیدهای مجانب قائم

قائم

مجانب ها

خطوط $x = (2k+1)\frac{\pi}{2a}$ در توابع $y = \tan(ax)$

افقی ← خط $y = L$ را مجانب افقی تابع f می گوئیم هرگاه: $\lim_{x \rightarrow \pm\infty} f(x) = L$

مایل ← در محدوده کتاب درسی نیست.

رفتار تابع در نزدیکی مجانب قائم

$x = a$	$x = a$	$x = a$	$x = a$
$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = -\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = +\infty$	$\lim_{x \rightarrow a^+} f(x) = +\infty$ $\lim_{x \rightarrow a^-} f(x) = -\infty$

رفتار تابع در نزدیکی مجانب افقی

L	L	L	L
$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^-$	$\lim_{x \rightarrow -\infty} f(x) = L^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^+$	$\lim_{x \rightarrow +\infty} f(x) = L^-$

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۱۱ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

مصحح شو

می خواهیم رفتار تابع $f(x) = \frac{[-x]}{1-x}$ را حول مجانب قائم آن بررسی کنیم: (صفحه ۵۸)

$1-x=0 \Rightarrow x=1$ مجانب قائم است، پس: (۰.۲۵)

$\lim_{x \rightarrow 1^+} \frac{[-x]}{1-x} = \frac{-2}{0^-} = +\infty$ (۰.۲۵)

۱

۲۰

$$\lim_{x \rightarrow 1^-} \frac{[-x]}{1-x} = \frac{-1}{.^+} = -\infty \quad (0.25)$$



(0.25)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

مسیر تمرینی:

مشابه این سوال در سوال ۳ امتحان نهایی خرداد ۱۴۰۴ مطرح شده بود.

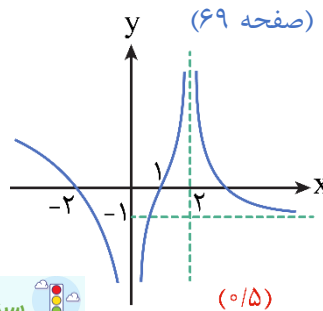
مصحح شو

شرایطی که تابع f باید داشته باشد: (صفحه ۶۹)

۱) $f(1) = f(-2) = 0$

۲) $\lim_{x \rightarrow 0} f(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow 2^+} f(x) = +\infty$

۳) $y = -1$ مجانب افقی



(0.5)

سبز بودی یا قرمز؟ بهترین زمان پاسخگویی برای این سوال: ۳ دقیقه

راهنمای مصحح:

پاسخ این سوال منحصر به فرد نبوده و به هر نموداری که هر ۳ شرط را داشته باشد، نمره تعلق می‌گیرد.

۲۰

موفق باشید.

۲۱